數學傳播 49卷2期, pp. 33-41

$c^2d\tau^2$, Minkowski metric, Schwarzschild metric 與相對論

張海潮

第一節 導言

現行數學系的課程《曲面論》, 對曲面幾何的處理, 大抵是以兩個參數局部描寫曲面, 並且賦予度規 (metric), 例如對歐基里得平面, 我們若以直角坐標 x, y 描寫, 其度規是 $dx^2+dy^2=ds^2$。而若改由極坐標 r, θ 描寫, $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$, 則度規 ds^2 表成 $dr^2+r^2d\theta^2$。(註1)

再如歐氏三度空間中的單位球面, 若以 θ, φ 描寫, φ 表經度, θ 表 $\pi/2$ 減緯度 $\theta\neq 0, \pi$, 則度規是 $ds^2=d\theta^2+\sin^2\theta d\varphi^2$。(註2)

至於一般抽象的曲面, 若局部以 u, v 描寫, 則賦予度規 $ds^2=Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, 式中 E, F, G 均爲 u, v 的函數。(註3)。應該提醒, 所謂的度規 ds^2 指的是在曲面上點 (u, v) 和點 $(u+du, v+dv)$ 之間的距離 ds 的平方, 因此 $Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$, 或 $(du, dv)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} du \\ dv \end{pmatrix}=ds^2$ 這個二次型, 其中對稱矩陣 $\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}$ 必須是正定的, 以符合距離平方的正條件要求。

1851 年黎曼 (註 4) 將上述的概念推廣到 n 維, 他提出在局部以參數 $(x_1, \ldots, x_n)$ 描寫的空間, 賦予度規 $ds^2=\sum g_{ij}dx_idx_j$, 或 $(dx_1, \ldots, dx_n)(g_{ij})\begin{pmatrix} dx_1 \\ \vdots \\ dx_n \end{pmatrix}$, 式中 (g_{ij}) 是一個對稱, 正定的 $n\times n$ 矩陣, ds^2 代表點 $(x_1, \ldots, x_n)$ 和點 $(x_1+dx_1, \ldots, x_n+dx_n)$ 之間的距離平方, 開啟了近世的微分幾何學。例如, 三維的歐式空間若以直角坐標 x, y, z 描寫其度規爲 $ds^2=dx^2+dy^2+dz^2$, 若是以球坐標 r, θ, φ 描寫, $r>0, \theta\neq 0, \pi$, 其度規爲 $ds^2=dr^2+r^2d\theta^2+r^2\sin^2\theta d\varphi^2$。注意到後者的 $(g_{ij})=\begin{pmatrix} 1 & & \\ & r^2 & \\ & & r^2\sin^2\theta \end{pmatrix}$ 是一個對稱(甚至是對角線化) 並且正定的矩陣。

這樣的發展, 到了 1908 年, 突然橫空出世了一個特異的結構, 就是在四維時空 $\mathbb{R}^4=$

$\{(t,x,y,z)\}$ 上賦予一個度規 $ds^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 或

$$(dt,dx,dy,dz)\begin{pmatrix}c^2&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}dt\\dx\\dy\\dz\end{pmatrix},\ \text{它的矩陣}\ \begin{pmatrix}c^2&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&-1\end{pmatrix}$$

是一個非正定的新結構, 後來稱爲仿黎曼幾何 (註5), 式中 c 代表慣性系統真空中的光速。並且成爲愛因斯坦 (1879~1955) 廣義相對論的幾何基礎。這一個特異的 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 被稱爲 $c^2d\tau^2$, 取代黎曼幾何的 ds^2, 又稱爲時空區間 (Spacetime interval) 式中 t,τ 的單位是時間, $ct,c\tau,x,y,z$ 的單位是距離。

在愛因斯坦發表狹義相對論 3 年之後的 1908 年哥廷根大學的數學教授 H. Minkowski (1864~1909) 在德國一個學術會議中, 報告了愛因斯坦狹義相對論的大要 (註6), 他在報告的導論說:

The views of space and time which I wish to lay before you have sprung from the soil of experimental physics, and therein lies their strength. They are radical. Henceforth space by itself, and time by itself, are doomed to fade away into mere shadows, and only a kind of union of the two will preserve an independent reality.

接著, Minkowski 提出了四維時空 $\mathbb{R}^4=\{(t,x,y,z)\}$ 的概念, 並且賦予時空間一個 Minkowski metric $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$, $c=$ 慣性系中的光速, 這個度規也稱爲時空區間 (Spacetime interval), 用以表示 (t,x,y,z) 和 $(t+dt,x+dx,y+dy,z+dz)$ 之間的距離平方, 不過這個距離平方不是正定的。注意到 $ct,c\tau,x,y,z$ 的單位都是距離。

第二節 慣性時空中, 時空區間 $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 的勞侖茲不變性

在 1905 年的論文裡 (註7) 愛因斯坦討論兩個互以等速 v 運動的慣性系統 (月台及火車) 之間的時空轉換, 如圖, 火車鐵軌是彼此的 x 和 x' 軸。

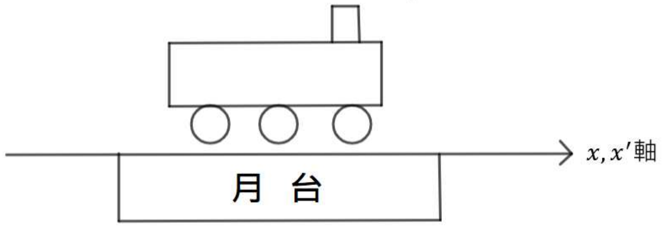

圖1

在光速恆定原理之下, 愛因斯坦得出一個具代表性的勞侖茲變換稱爲 x 方向的 Lorentz boost (註8)

$$\begin{aligned} t' &= \big(t - \frac{v}{c^2}x\big)\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\\ x' &= (x-vt)\Big/\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},\\ y' &= y,\\ z' &= z; \end{aligned}$$

式中火車和月台上的時空坐標分別是 (t,x,y,z) 和 (t',x',y',z'), 兩者在
$(t,x,y,z)=(0,0,0,0)$ 和 $(t',x',y',z')=(0,0,0,0)$ 重合。

所謂光速恆定是指在慣性系的火車或月台所量得的光速均爲 $c = 299,792,458$ 公尺/秒, 與光源的速度無關, 愛因斯坦曾基於此原理給出一個簡單的推論以導出上述勞侖茲變換 (同註 8) 並且說明光速恆定原理保證 Minkowski Metric (度規) 是勞侖茲不變的, 亦即 $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 = c^2dt'^2 - dx'^2 - dy'^2 - dz'^2$, 愛因斯坦論證如下 (註 9)。

如圖一, 從月台與火車重合的位置 $(0,0,0,0)$ 和 $(0',0',0',0')$ 發出一個光的球面波。從月台觀之, 它到達 (t,x,y,z) 時滿足 $ct=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, c 是光速。

而從相應的火車觀之, 亦有 $ct'=\sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}$, 換句話說, 在月台時空若有 $c^2t^2 - x^2-y^2-z^2=0$, 則在火車時空也有 $c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=0$, 反之亦然。因爲聯結月台和火車的坐標轉換正是線性的勞侖茲變換。所以 t',x',y',z' 是 t,x,y,z 的一次齊次式, 因此 $c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$ 是 t,x,y,z 的二次齊次式, 既然 $c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=0$ 若且唯若 $c^2t^2-x^2-y^2-z^2=0$, 由此可證

$$c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2=\sigma(c^2t^2-x^2-y^2-z^2), \quad \sigma>0.$$

又基於對稱性, 可知 $\sigma=1$。

此外, 不僅 $c^2t^2-x^2-y^2-z^2 = c^2t'^2-x'^2-y'^2-z'^2$ 符合勞侖茲不變, 它的微量形式 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 亦然, 以上是愛因斯坦對 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2 = c^2dt'^2-dx'^2-dy'^2-dz'^2$ 簡要的論證。

接著, 若仔細檢視 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$, 當可發現它另外在下列 2 類轉換下不變

(1) $(t,x,y,z)\to(t+\delta,x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)$ 亦即平移不變, 是慣性系的特徵。

(2) $t\to t$, $(x,y,z)\to(x,y,z)R$, 式中 R 是三度空間中的正交矩陣 (orthogonal 矩陣) 保持 $x^2+y^2+z^2$或 $dx^2+dy^2+dz^2$, 此即 3 度空間 $x^2+y^2+z^2$ 的轉動不變, 亦是慣性系的特徵。

配合上述在勞侖茲變換下的不變, 當知 $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ 是慣性系及光速恆定原理下, 唯一的不變量 (註10)。

第三節 慣性系 $\mathbb{R}^4$ 中 $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ 的意義

既然 $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$ 在慣性系的幾何對稱和光速恆定原理下不變, 它本身應該代表一個深刻的物理意義, 這就是 Minkowski 的偉大發現, (同註 6, p.85) 他聲稱有一個物理量 τ, 稱爲原時 (proper time)。

$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, 而 $\int d\tau = \tau$ 是沿著運動軌跡的質點所攜帶的鐘所測得的時間, 爲何如此? 讓我們回到圖一的 Lorentz boost, 在那裡, 如果火車司機手持一個鐘, 則此鐘的 $\Delta x' = 0$, 所以 $\Delta x = v\Delta t$, 而

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{v}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t - \frac{v^2}{c^2}(\Delta t)}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \Delta t\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

此外, 從 $d\tau$ 的定義, $d\tau^2 = dt^2 - \frac{1}{c^2}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, 而且如圖一。$dy = dz = 0$ 則 $d\tau^2 = dt^2\Big(1 - \frac{1}{c^2}\frac{dx^2}{dt^2}\Big) = dt^2\Big(1 - \frac{v^2}{c^2}\Big)$, 比較兩式, 即知 $\Delta t' = \Delta\tau$。

從此, 在狹義相對論所涉及的慣性系統中, τ 或 $d\tau$ 變成了在歐氏幾何中距離 s 或 ds 一樣的地位, 它標誌了 (t, x, y, z) 和 $(t + dt, x + dx, y + dy, z + dz)$ 之間的時空區間。注意到 $c^2d\tau^2$ 的單位和 ds^2 是一樣的。

上述討論附帶處理了有名的「雙生子謬誤」。

雙生子這個議題是說地球上有一對雙胞胎, 哥哥坐太空船出去一陣後回到地球, 見到弟弟變得很老, 但是就相對運動而言, 弟弟也應見到哥哥變老, 到底誰比較老?

正確的答案哥哥變年輕了, 因爲哥哥攜帶的時間 τ, 是哥哥的原時, $d\tau = dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, v 是哥哥對地球的速度, 哥哥旅行一圈回來, 耗時 $\tau = \int dt\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < \int dt =$ 地球上弟弟經過的時間。此處並沒有相對運動對稱的問題, 因爲地球是 $\mathbb{R}^4$, 其中有一個全域的時間 t, 和哥哥經歷的 τ 之間並非對稱的概念。

此外, 因爲 $c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$, 或 $c^2d\tau^2 = dt^2\Big(c^2 - (\frac{dx}{dt})^2 - (\frac{dy}{dt})^2 - (\frac{dz}{dt})^2\Big) = dt^2(c^2 - v^2)$, 易見 $d\tau = 0$ 等價於 $v = c$, 即光速, 所以光以光速進行時, 原時爲 0。此一觀察在第二節已經出現, 其實就是光速恆定原理, 而另一方面, $d\tau^2 > 0$ 代表 $v^2 = (\frac{dx}{dt})^2 + (\frac{dy}{dt})^2 + (\frac{dz}{dt})^2 < c^2$, 亦即任意質點的速度都小於光速。

想像有一個基本粒子, 本身壽命 $\tau = 18$ 秒, 在實驗室從 t_0 到 t_1 的時間以高速 v 前進,

而在 t_1 衰變, 則

$$18=\int_{t_0}^{t_1} d\tau=\int_{t_0}^{t_1} dt\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\int_{t_0}^{t_1} dt=(t_1-t_0)\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}},$$

則在實驗室的壽命 t_1-t_0 是 $18\Big/\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}$, 隨著高速 v, 壽命可以相當長。

這些都是狹義相對論的結論。(註 11)

第四節 Minkowski 洞察狹義相對論的數學結構

事實上, 在 1908 年, Minkowski 已經看清楚狹義相對論的內涵, 並且以清晰的數學結構 $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$ 把原來黎曼所賦予的幾何度規一正定的 ds^2 以符合狹義相對論的非正定的度規 $c^2d\tau^2$ 來代替, 從而開啓了一個新的仿黎曼結構, 以下是當時愛因斯坦的反應, (根據 Pais)(註 12)。

Thus began the enormous formal simplification of special relativity. Initially, Einstein was not impressed and regarded the transcriptions of his theory into tensor form as superfluous learnedness.

However, in 1912 he adopted tensor methods and in 1916 acknowledged his indebtedness to Minkowski for having greatly facilitated the transition from special to general relativity.

最後, 1916 年, 愛因斯坦成功的發表廣義相對論的基礎 (註 13), 在序文中他感謝了 Minkowski 的引領, 但後者已在 1909 年 1 月去世。

原來, 1905 年發表的狹義相對論只討論無重力狀況下的時間, 空間和恆定的光速 299,792,458 公尺/秒, 用以聯繫時間與空間。但是在 1907 年之後, 愛因斯坦認識到空間中存有重力時, 光速不再是恆定的, 而是靠近重力時走得慢, 遠離重力時走得快, 因此光經過重力場會有彎曲的現象。這促使愛因斯坦在考慮廣義相對論 (即受重力影響的時空理論) 時, 放棄慣性系的概念。換句話說, 既然空間不是原來的慣性系, 當然距離的關係不應該是 $dx^2+dy^2+dz^2$, 時空區間也不應該是 $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$, 愛因斯坦需要尋求一個新的時空區間 $c^2d\tau^2$ 來取 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$。因此他想到了 Minkowski metric 及伴隨的張量方法。(同註 13)

其實 Minkowski Metric $c^2d\tau^2=c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$, 本身就是一個二級的對稱張量或張量場 (Tensor field), 如同黎曼幾何中的 $ds^2=\sum g_{ij}dx_idx_j$, 只不過, 愛因斯坦在 $\mathbb{R}^4=\{(x_0,x_1,x_2,x_3)\}$ 所尋找的 $\sum g_{ij}dx_idx_j$ 並非正定, 而是要求 g_{ij} 對角線化後的固有值是三負一正, 如同 $c^2dt^2-dx^2-dy^2-dz^2$, 而後者 (special relativity) 應該是前者 (general

relativity) 的極限情形。(同註 9, p.48, 22節)

大致上, 從 1907 到 1916, 愛因斯坦終於發現了規範在重力影響下的時空區間, $c^2d\tau^2 = \sum g_{ij}dx_idx_j$ 必須滿足的場方程式, (註14) 並同時成功的預測了光經過太陽的偏折角度和解釋了水星軌道的進動現象。(註15)

在此, 應該提到在廣義相對論的場方程式規範之下, 第一個得到的解 Schwarzschild 度規 (註16), 我們將在下一節介紹這個解所透露的重要訊息。

第五節 Schwarzschild metric 與廣義相對論

當時空中有重力分佈時, 最簡單的情形就是在坐標空間的原點, 只有一個靜止的質量爲 M 的球體 (簡稱太陽), 而在 M 之外, 完全沒有重力分佈。由此而解出一個滿足愛因斯坦場方程式的解。(同註16)

Schwarzschild metric:

$$c^2d\tau^2 = c^2\Big(1-\frac{2MG}{c^2r}\Big)dt^2-\Big(1-\frac{2MG}{c^2r}\Big)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2. \qquad (1)$$

(1) 式中 c 是慣性系中的光速 $= 299,792,458$ 公尺/秒, M 是太陽的質量, G 是萬有引力常數, t, r, θ, φ 是慣性時空 $\mathbb{R}^4$ 的坐標。對這個解, 我們有以下的理解

(一) 此解是靜止的, 不隨時間變動。

(二) r, θ, φ 是空間的球坐標, $dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$。(1) 式中, $r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2$ 是半徑爲 r 的球面度規, 因此易見, 此解是空間球對稱的。

(三) 此解在 $M = 0$ 時, 回到狹義相對論的 Minkowski Metric

$$c^2d\tau^2 = c^2dt^2 - dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2. \qquad (2)$$

而當 $r \to \infty$ 時, 亦趨近 Minkowski Metric, 即在遠離重力 M 時, 空間回到慣性的狀態。

(四) 若萬有引力常數 G 以 $6.67\times10^{-11}m^3/kg\cdot s^2$, M 以太陽質量 $2\times10^{30}kg$, r 以太陽半徑 $R = 0.7\times10^9m$, c 以 $3\times10^8m/s$, 代入, 得到 $\dfrac{2MG}{Rc^2} = 4\times10^{-6}$ 弧度(無單位)。因此在本太陽系的情形, Schwarzschild metric (1) 式與 (2) 式 Minkowski Metric 只差一點點, 但卻足以讓愛因斯坦完成光經過太陽偏折的角度和水星軌道的計算。(同註15)

(五) 若太陽的半徑爲 r_B, 則此解只在 r_B 之外有意義, 又由此解

$$c^2d\tau^2 = c^2\Big(1-\frac{2MG}{c^2r}\Big)dt^2-\Big(1-\frac{2MG}{c^2r}\Big)^{-1}dr^2-r^2d\theta^2-r^2\sin^2\theta d\varphi^2$$

在 $r \le \dfrac{2MG}{c^2}$ 處亦無意義, 亦即本解適用的範圍在 $r > r_B$ 及 $r > \dfrac{2MG}{c^2}$ 處。

以本太陽系爲例, 根據本節 (四) 的計算 $\dfrac{2MG}{c^2} = 4 \times 10^{-6} \times r_B$, 因此只要 $r > r_B$, r 也一定大於 $\dfrac{2MG}{c^2}$。

(六) 在空間中某一定點 $P(r, \theta, \varphi$ 均爲常數) (但隨時間 t 演化), 則 $dr = d\theta = d\varphi = 0$, $dt \neq 0$。有

$$c^2d\tau^2 = c^2\Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big)dt^2,$$

或

$$d\tau = \Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big)^{\frac{1}{2}}dt.$$

這代表在此點的鐘 $d\tau$ 走得比慣性坐標系中的鐘 dt 慢, 記得 $d\tau$ (或 τ) 代表的是質點的內在時間, 即原時。

而若比較 Q 點 (r', θ', φ') 處的 $d\tau'$, 則

$$\frac{d\tau}{d\tau'} = \left(\frac{1 - \dfrac{2MG}{rc^2}}{1 - \dfrac{2MG}{r'c^2}}\right)^{\frac{1}{2}},$$

當 $r' > r$ 時 $\dfrac{d\tau}{d\tau'} < 1$, 表示靠近太陽的鐘走得慢, 遠離的走得快。

(七) 在第三節, 我們看到 $c^2d\tau^2 = 0$ 包含光的路徑, 現假設光直接射向太陽, $\theta = \varphi =$ 常數, $d\theta = d\varphi = 0$, 則

$$0 = c^2d\tau^2 = c^2\Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big)dt^2 - \Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big)^{-1}dr^2,$$

或

$$\Big(\frac{dr}{dt}\Big)^2 = c^2\Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big)^2.$$

因爲 r 遞減, 所以

$$\frac{dr}{dt} = -c\Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big),$$

或

$$\Big|\frac{dr}{dt}\Big| = \text{光速} = c\Big(1 - \frac{2MG}{rc^2}\Big).$$

由本節 (五), 上述計算僅在 $r > \dfrac{2MG}{c^2}$ 時適用。

此時注意到第一, 當 $r \to \infty$ 時光速 $\to c = 299,792,458$ 公尺/秒, 第二, 當 $r \to \dfrac{2MG}{c^2}$ 時光速 $\to 0$, 也就是說如果 $r_B < \dfrac{2MG}{c^2}$, 則在 $r = \dfrac{2MG}{c^2}$ 這個球面, 光線會被完全捕捉, 形

成光速爲 0 的狀態, 這個現象稱爲黑洞, 而其半徑 $\dfrac{2MG}{c^2}$ 稱爲 Schwarzschild 半徑。因爲在本太陽系, $r_B > \dfrac{2MG}{c^2} =$ Schwarzschild 半徑, 因此不發生黑洞現象。可是如果 $r_B < \dfrac{2MG}{c^2}$ 則光到達此一位置速度便會爲 0, 無法傳播。(註14, p.125)

後記

在 1907 年之後, 愛因斯坦對有重力如太陽存在時, 利用一些基本的論證, 得到上節 (六) (七) 的結論, 即靠近重力, 時間變慢, 光速也變慢, 但直到得出 Schwarzschild 解, 上述事實才真正有定量的結果 (同註15)。

在 1916 年, 愛因斯坦集大成的論文首頁 (同註13), 他提到 Minkowski 和一些幫助他了解張量計算的數學家, 而在論文末頁, 他提到了 Schwarzschild metric。

謹以此文, 紀念幫助相對論發展的學者。

註1: 符號 ds^2 表示 $(ds)^2$, dx^2 表示 $(dx)^2$ 等等, 直角坐標與極坐標的關係是 $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 因此 $dx = dr(\cos\theta) - r\sin\theta d\theta$, $dy = dr(\sin\theta) + r\cos\theta d\theta$, $dx^2 + dy^2 = (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^2 + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2$。

註2: 此處 $x = \sin\theta\cos\varphi$, $y = \sin\theta\sin\varphi$, $z = \cos\theta$ 計算 $dx^2+dy^2+dz^2 = (\cos\theta\cos\varphi d\theta - \sin\theta\sin\varphi d\varphi)^2 + (\cos\theta\sin\varphi d\theta + \sin\theta\cos\varphi d\varphi)^2 + (-\sin\theta d\theta)^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$.

註3: 一本常用的教科書是 Do Carmo《*Differential Geometry of Curves and Surfaces*》。

註4: 黎曼《論幾何學之基礎假說》數學傳播, 1990 年 14 卷 3 期。

註5: 英文是 *Pseudo-Riemannian Geometry* 或 *Semi-Riemannian Geometry*, 亦譯作《僞黎曼幾何》。

註6: 見《*The Principle of Relativity*》Dover Publications, Inc. 1952 pp.71-95.

註7: 同註 6, pp.37-65。

註8: 張海潮《愛因斯坦對勞侖茲變換的簡單推導》數學傳播季刊, 2023 年 47 卷 1 期, 15-19。

註9: 相對論入門, 李精益譯, 台灣商務印書館, p.81, 附錄1。

註10: t, x, y, z 的平移有 4 個自由度, 三度空間的轉動有 3 個自由度。x, y, z 三個方向的 Lorentz boost 亦有 3 個自由度, 組合起來組成 Poincaré 變換, 共 10 個自由度。

註11: 張海潮《狹義相對論常見的幾個議題及實驗》數學傳播季刊, 2023 年 47 卷 3 期, 54-59。

註12: Pais, *The Science and the Life of Albert Einstein*, p.152.

註13: 中譯見紀念愛因斯坦文集, 台灣凡異出版社, 278-334。

註14: J. Foster and J.D. Nightingale, A Short Course in General Relativity. p.114 敘述了 g_{ij} 必須滿足的場方程式: $R_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}R = \kappa T_{ij}$, 式中 R_{ij} 和 R 分別是 g_{ij} 的 Ricci 曲率和純量曲率, T_{ij} 被重力分佈決定, κ 是一個常數。

註15: 張海潮《愛因斯坦的曲率公式和光經過太陽的偏折角度》, 數學傳播季刊, 2018年42卷2期, 《介紹愛因斯坦1915年11月18日的水星論文》, 數學傳播季刊, 2018年42卷3期。

註16: 同註14, p.121, Schwarzschild 解滿足 R_{ij} 和 R 以及 T_{ij} 都等於 0, 但是在 $\dfrac{2MG}{c^2r} \geq 1$ 處無定義。

—本文作者爲台大數學系退休教授—